

berechnet. Diese „abgeschnittene Verteilung“ beschreibt die maximale Störung, die durch die Gegenwart der Wand verursacht werden kann. Man findet

$$\frac{m - \overline{W}_r^2}{k T_-} = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \sqrt{\frac{e(U - U_w)}{k T_-}} \right) \quad (\text{A } 6)$$

Damit folgt aus der Impulsbilanz (6) anstelle von (8) die Beziehung

$$\Gamma_{-r} = -n_- D_- [a(\eta) \nabla_r \eta + b(\eta) (\nabla_r n_-) / n_-] \quad (\text{A } 7)$$

$$\text{mit} \quad a(\eta) = 1 - \sqrt{(\eta_w - \eta) / \pi} e^{-(\eta_w - \eta)} \quad (\text{A } 8)$$

$$\text{und} \quad b(\eta) = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{erf} \sqrt{\eta_w - \eta}). \quad (\text{A } 9)$$

Verwendet man den Zusammenhang (A 7) anstelle von Gl. (8) in unserer Auswertung, so ergeben sich in den Endresultaten nur verschwindende Abweichungen.

Dieses Ergebnis ist physikalisch einleuchtend. In dem Bereich, wo die Korrekturen der MAXWELL-Verteilung wesentlich werden, ist die Elektronendichte gegenüber der Ionendichte bereits so stark abgesunken, daß sie die Raumladung nicht mehr beeinflusst.

Die numerische Integration wurde durchgeführt auf der IBM 7090 des Rheinisch-Westfälischen Instituts für Instrumentelle Mathematik. Wir danken Herrn SPATSCHEK für seine Hilfe bei der Programmierung.

## Über die Wechselwirkung eines Plasmastrahls mit einem achsensymmetrischen Magnetfeld

K. RAGALLER

Elektrophysikalisches Institut der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforschg. 21 a, 725—732 [1966]; eingegangen am 3. März 1966)

The interaction of a plasma jet with an axisymmetric magnetic field, is calculated in linear approximation for a periodic and for a convergent or divergent field configuration.

The solution depends on the MACH number, the magnetic pressure number, and the magnetic REYNOLDS number.

In the convergent field, the plasma is decelerated. If the flow is supersonic, this is connected with a contraction of the jet leading beyond equilibrium and therefore being followed by an expansion. In the subsonic case, the stopping is accompanied by a broadening of the jet.

With increasing magnetic REYNOLDS number, "wakes" appear which extend upstream or downstream, depending on the values of the magnetic pressure number and the MACH number.

Das experimentelle Studium magnetogasdynamischer Effekte, die durch induzierte Ströme und Magnetfelder gekennzeichnet sind, steckt noch im Anfangsstadium, da die Leitfähigkeit, die Geschwindigkeit und die geometrische Ausdehnung von experimentell erzeugbaren Plasmen bisher noch nicht groß genug waren. In jüngerer Zeit entwickelte Plasmabrenner<sup>1-3</sup> lassen solche Versuche jedoch aussichtsreich erscheinen.

Theoretische Untersuchungen, die sich mit der Plasmaströmung um Körper bei Anwesenheit eines Magnetfelds in linearer Näherung befassen<sup>4-6</sup>, zeigen

ten eine Fülle von neuen Lösungen auf. Diese Ergebnisse lassen sich aber vorerst nicht im Experiment nachprüfen, da mit unendlicher Ausdehnung und vielfach auch mit unendlicher Leitfähigkeit des Plasmas gerechnet wird.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es nun, eine experimentell relativ einfach realisierbare magnetogasdynamische Strömung theoretisch zu untersuchen. Als wohl einfachstes Problem dieser Art wird die Wechselwirkung eines Plasmastrahls mit einem achsensymmetrischen Magnetfeld in linearer Näherung behandelt.

<sup>1</sup> Th. PETERS, Z. Naturforschg. 19 a, 1129 [1964].

<sup>2</sup> K. RAGALLER, Dissertation Techn. Hochschule München 1966.

<sup>3</sup> A. C. DUCATI, G. M. GIANNINI u. E. MUEHLENBERGER, Am. Inst. Aeron. Astronaut. J. 2, 1452 [1964].

<sup>4</sup> W. R. SEARS, Rev. Mod. Phys. 32, 701 [1960].

<sup>5</sup> J. E. McCUNE u. E. L. RESLER, J. Aerospace Sci. 27, 493 [1960].

<sup>6</sup> H. GRAP, Rev. Mod. Phys. 32, 830 [1960].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

## 1. Problemstellung

Einem zylindrischen Plasmastrahl mit dem Radius  $R$  sei ein konstantes axiales äußeres Magnetfeld  $B_{z0}$  überlagert. In diesem Fall entsteht keine Wechselwirkung des Strahls mit dem Magnetfeld. Die Größen des ungestörten Strahls werden *Grundgrößen* genannt und folgendermaßen bezeichnet:

Geschwindigkeit  $v_{z0}$ , Druck  $p_0$ , Dichte  $\varrho_0$ .

Tritt zur axialen eine radiale Komponente  $B_{ra}$  des äußeren Feldes hinzu, dann wird eine elektrische Stromdichte in  $\varphi$ -Richtung induziert, die die ursprüngliche Plasmaströmung und auch das Magnetfeld modifiziert (Abb. 1). Deshalb wird im folgenden ein Gebiet, wo das äußere Feld eine radiale Komponente besitzt, als *Störstelle* bezeichnet.

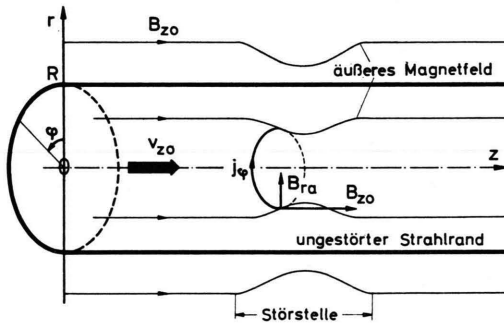


Abb. 1. Erläuterung der Problemstellung.

Die Abweichungen der Größen von ihren Werten im ungestörten Fall werden *Störgrößen* genannt. Folgende Störgrößen treten auf:

Druck  $p^*$ , Dichte  $\varrho^*$ ,  
 radiale und axiale Geschwindigkeitskomponente  $v_r^*$ ,  $v_z^*$ ,  
 radiale und axiale Komponente des induzierten Magnetfelds  $B_{ri}^*$ ,  $B_{zi}^*$ ,  
 radiale und axiale Komponente des totalen Magnetfelds  $B_{rt}^*$ ,  $B_{zt}^*$ ,  
 Stromdichte in  $\varphi$ -Richtung  $j_\varphi^*$ .

Die Aufgabe ist, für ein vorgegebenes gestörtes Magnetfeld die Störgrößen zu bestimmen.

Zunächst wird ein Magnetfeld mit periodischen Verengungs- und Erweiterungsstellen untersucht, dann wird mittels einer FOURIER-Transformation aus diesem Ergebnis die Lösung für eine Verengungs- oder Erweiterungsstelle abgeleitet.

## 2. Gleichungen

Die Gleichungen der Magnetogasdynamik lauten bei Annahme von Stationarität ( $\partial/\partial t = 0$ ) für eine isentrope Strömung ohne elektrisches Feld<sup>7</sup>:

$$\operatorname{div} \varrho \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\varrho (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v} = -\operatorname{grad} p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}_t, \quad (2)$$

$$\partial p / \partial \varrho = c^2, \quad (3)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{v} \times \mathbf{B}_t, \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_i = \mu \mathbf{j}, \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_i = 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_a. \quad (7)$$

In die Gln. (1) – (7) ist für jede Größe die Summe aus Grund- und Störanteil einzusetzen. Wird nun angenommen, daß  $B_{ra} \ll B_{z0}$  ist, dann dürfen die Störgrößen als klein von erster Ordnung behandelt und somit deren Produkte in den Gleichungen vernachlässigt werden. Mit dieser Vorschrift können die nicht-linearen Gl. (1), (2) und (4) linearisiert werden; sie lauten dann:

$$\varrho_0 (\partial v_r^* / \partial r + v_r^* / r + \partial v_z^* / \partial z) + v_{z0} \cdot \partial \varrho^* / \partial z = 0, \quad (1')$$

$$\varrho_0 v_{z0} \cdot \partial v_z^* / \partial z = -\partial p^* / \partial z, \quad (2'a)$$

$$\varrho_0 v_{z0} \cdot \partial v_r^* / \partial z = -\partial p^* / \partial r + j_\varphi^* B_{z0}, \quad (2'b)$$

$$j_\varphi^* = \sigma (v_{z0} B_{rt}^* - v_r^* B_{z0}). \quad (4')$$

## 3. Periodische Lösung

### 3.1 Äußeres Magnetfeld

Wird die radiale Komponente des äußeren Magnetfelds  $B_{ra}$  proportional  $e^{i\beta z}$  angesetzt, dann ist die  $z$ -Abhängigkeit aller Störgrößen wegen der Linearität der Gleichungen ebenfalls durch die Funktion  $e^{i\beta z}$  gegeben. Die radiale Abhängigkeit von  $B_{ra}$  folgt aus den beiden Gleichungen  $\operatorname{rot} \mathbf{B}_a = 0$  und  $\operatorname{div} \mathbf{B}_a = 0$ . Es ergibt sich dafür die Funktion  $I_1(\beta r)$  (modifizierte BESSEL-Funktion erster Ordnung<sup>8</sup>).

Die Berechnung der Störgrößen gelingt in der Näherung  $\beta R \ll 1$ . Mit dieser Forderung kann  $I_1(\beta r)$  durch das erste  $r$ -proportionale Glied der Entwicklung um  $r = 0$  ersetzt werden.

<sup>7</sup> S. I. PAI, Magnetogasdynamics and Plasma Dynamics, Verlag Springer, Wien 1962.

<sup>8</sup> E. JAHNKE, F. EMDE u. F. LÖSCH, Tafeln höherer Funktionen, Verlag Teubner, Stuttgart 1960.

Für  $B_{ra}$  gilt somit:

$$B_{ra} = B r e^{i\beta z}. \quad (8)$$

### 3.2 Umformung der Gleichungen

Aus Gl. (2'a) folgt mit  $\partial/\partial z = i\beta$ :

$$p^* = -Q_0 v_{z0} v_z^*. \quad (9)$$

Dies wird in Gl. (2'b) und in Gl. (1') eingesetzt, wobei in letzterer nach Gl. (3)  $\partial Q^*/\partial z$  durch  $(1/c^2) \partial p^*/\partial z$  ersetzt werden darf. Aus den beiden so erhaltenen Differentialgleichungen für  $v_r^*$  und  $v_z^*$  kann  $v_z^*$  eliminiert werden:

$$\frac{\partial^2 v_r^*}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_r^*}{r} \right) + m^2 \beta^2 v_r^* + j_\varphi^* \frac{B_{z0}}{Q_0 v_{z0}} m^2 i \beta = 0, \quad (10)$$

dabei wurde eingeführt:

$$m^2 = M^2 - 1, \quad (11)$$

wobei  $M = v_{z0}/c$  die MACH-Zahl des ungestörten Strahls bedeutet.

Ferner lassen sich die Gln. (5) und (6) zu einer Differentialgleichung für  $B_{ri}^*$  zusammenfassen. Gl. (5) lautet in Komponentenschreibweise mit  $\partial/\partial z = i\beta$ :

$$i\beta B_{ri}^* - \partial B_{zi}^*/\partial r = \mu j_\varphi^* \quad (5')$$

und Gl. (6):

$$\partial B_{ri}^*/\partial r + B_{ri}^*/r + i\beta B_{zi}^* = 0. \quad (6')$$

Wird aus (5') und (6')  $B_{zi}^*$  eliminiert, dann erhält man

$$\frac{\partial^2 B_{ri}^*}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{B_{ri}^*}{r} \right) - \beta^2 B_{ri}^* = i\beta \mu j_\varphi^*. \quad (12)$$

Die Gln. (4'), (10) und (12) bilden jetzt ein System von drei Differentialgleichungen für die drei unbekannten Störgrößen  $v_r^*$ ,  $B_{ri}^*$  und  $j_\varphi^*$ .

### 3.3 Lösung der Differentialgleichungen durch Potenzreihenansätze

Für die genannten drei Störgrößen werden folgende Reihen, in denen die Symmetriebedingungen auf der Achse berücksichtigt sind, angesetzt:

$$j_\varphi^* = J r \left[ 1 + \sum_{n=1}^N a_n (r/R)^{2n} \right] e^{i\beta z}, \quad (13)$$

$$B_{ri}^* = b r \left[ 1 + \sum_{n=1}^N b_n (r/R)^{2n} \right] e^{i\beta z}, \quad (14)$$

$$v_r^* = w r \left[ 1 + \sum_{n=1}^N c_n (r/R)^{2n} \right] e^{i\beta z}; \quad (15)$$

$J$ ,  $b$  und  $w$  sind dabei konstante Amplitudenfaktoren.

Die Ansätze Gln. (13) – (15) werden in die Gln. (4'), (10) und (12) eingesetzt. Durch Vergleich der Koeffizienten gleicher Potenzen von  $r$  erhält man die folgenden Beziehungen:

aus Gl. (4)', wenn noch Gln. (7) und (8) eingesetzt werden,

$$J = \sigma v_{z0} (b + B) - \sigma w B_{z0} \quad (16)$$

$$\text{und} \quad J a_n = \sigma v_{z0} b b_n - \sigma B_{z0} w c_n; \quad (17)$$

aus Gl. (10)

$$w (8 c_1 + m^2 \beta^2 R^2) = -i \beta R^2 m^2 B_{z0} J / (Q_0 v_{z0}) \quad (18)$$

sowie

$$4 n (n+1) c_n = \frac{-m^2 \beta^2 R^2 c_{n-1} - J m^2 i \beta R^2 B_{z0} a_{n-1}}{w Q_0 v_{z0}} \quad (19)$$

und schließlich aus Gl. (12):

$$b (8 b_1 - \beta^2 R^2) = i \beta \mu J R^2 \quad (20)$$

$$\text{und} \quad 4 n (n+1) b_n = \beta^2 R^2 b_{n-1} + J i \beta R^2 \mu a_{n-1} / b. \quad (21)$$

Den Gln. (17), (19) und (21) kann entnommen werden, daß die Koeffizienten  $a_n$ ,  $b_n$  und  $c_n$  mit wachsendem  $n$  immer höhere Potenzen von  $(\beta R)$  als Faktor enthalten. Es ist daher sinnvoll, sich in der Näherung  $\beta R \ll 1$  auf die ersten beiden Summenglieder in den Gln. (13) – (15) zu beschränken.

Wird zunächst angenommen, daß  $c_1$  und  $b_1$  von der Größenordnung 1 sind, – diese Annahme bestätigt sich unten, – dann folgt aus Gl. (18) und (20):

$$w = -i \beta R^2 m^2 B_{z0} J / (8 c_1 Q_0 v_{z0}) \quad (22)$$

$$\text{und} \quad b = i \beta R^2 \mu J / (8 b_1). \quad (23)$$

Werden diese beiden Beziehungen in Gl. (16) eingeführt, dann erhält man:

$$J = \frac{\sigma v_{z0} B}{1 - \sigma v_{z0} i \beta R^2 \mu / (8 b_1) - \sigma m^2 i \beta B_{z0}^2 R^2 / (Q_0 v_{z0} 8 c_1)}. \quad (24)$$

Aus Gl. (17) folgt für  $n=1$  mit Gl. (22) und (23):

$$a_1 = i \beta R \left\{ \frac{1}{8} \sigma v_{z0} \mu R + \frac{1}{8} \sigma m^2 i \beta R^2 B_{z0}^2 / (Q_0 v_{z0}) \right\}. \quad (25)$$

Damit können aus Gl. (19) für  $n=2$  der Koeffizient  $c_2$  als Funktion von  $c_1$  und entsprechend aus Gl. (21) die Größe  $b_2$  als Funktion von  $b_1$  ermittelt werden.

Man erhält die Beziehungen:

$$c_2 = \frac{1}{24} c_1 (-m^2 \beta^2 R^2 + 8 a_1) \quad (26)$$

$$\text{und} \quad b_2 = \frac{1}{24} b_1 (\beta^2 R^2 + 8 a_1). \quad (27)$$

### 3.4 Randbedingungen

Folgende Bedingungen sind am Strahlrand, der in erster Näherung durch  $r(z) = R$  gegeben ist, zu erfüllen:

1. die Druckstörung  $p^*$  muß verschwinden;
2. die Lösung für das induzierte Magnetfeld muß stetig in die Lösung übergehen, die man im Bereich  $R < r < \infty$ , wo keine Stromdichte induziert wird, erhält.

Die erste Bedingung  $p^*(R) = 0$  bedeutet wegen Gl. (2'a)  $v_z^*(R) = 0$  und mit Gl. (1')

$$(\partial v_r^* / \partial r)_R + v_r^*(R)/R = 0 \quad (28)$$

oder, wenn Gl. (15) eingesetzt wird,

$$\sum_{n=1}^N (n+1) c_n = -1. \quad (29)$$

Beschränkt man sich wieder auf die ersten beiden Glieder der Summe, dann gilt:

$$2c_1 + 3c_2 = -1. \quad (30)$$

Zusammen mit Gl. (26) kann daraus  $c_1$  ermittelt werden:

$$c_1 = -1/[2 + \frac{1}{4}(-m^2 \beta^2 R^2 + 8a_1)]. \quad (31)$$

Zur Verwertung der zweiten Randbedingung muß zunächst die Lösung für  $\mathbf{B}_i^*$  im Außenraum bestimmt werden. Man erhält aus den beiden Differentialgleichungen  $\text{rot } \mathbf{B}_i^* = 0$  und  $\text{div } \mathbf{B}_i^* = 0$ :

$$B_{r1}^* \propto K_1(\beta r) e^{i\beta z} \quad \text{und} \quad B_{z1}^* \propto K_0(\beta r) e^{i\beta z}$$

(modifizierte BESSEL-Funktion 2. Art, 1. bzw. 0. Ordnung<sup>8</sup>).

Für  $\beta R \ll 1$  ist das Verhältnis  $K_0(\beta R)/K_1(\beta R)$  ebenfalls sehr klein gegen 1, die Randbedingung darf dann durch die Forderung  $B_{z1}^*(R) = 0$  ersetzt werden.

Wie oben erhält man daraus die Beziehungen:

$$\sum_{n=1}^N b_n (n+1) = -1 \quad (32)$$

$$\text{und} \quad b_1 = -1/[2 + \frac{1}{4}(\beta^2 R^2 + 8a_1)]. \quad (33)$$

### 3.5 Ergebnisse

Die Gln. (31) und (33) werden in die Gln. (22) bis (24) eingesetzt und Ausdrücke, die eine höhere als die erste Potenz von  $\beta R$  enthalten, gegen 1 vernachlässigt. Ferner werden folgende Abkürzungen

eingeführt:

$$R_m = \frac{1}{4} \sigma \mu v_{z0} R, \quad (34)$$

$$Q = \sigma B_{z0}^2 R / (4 \varrho_0 v_{z0}) \quad (35)$$

sowie

$$g = 1/(R_m + m^2 Q). \quad (36)$$

Dann gilt für die ersten Glieder der Entwicklungen für die Störgrößen:

$$j_\varphi^* = \sigma B_{z0} \frac{g}{g + i\beta R} r e^{i\beta z}, \quad (37)$$

$$v_r^* = (B/B_{z0}) v_{z0} m^2 Q g \frac{i\beta R}{g + i\beta R} r e^{i\beta z}, \quad (38)$$

$$B_{rt}^* = B g \frac{1 + m^2 Q i\beta R}{g + i\beta R} r e^{i\beta z}. \quad (39)$$

Auf eine ausführliche Diskussion dieser Beziehungen wird verzichtet. Es sei lediglich auf einen charakteristischen Unterschied zwischen Über- und Unterschallströmung hingewiesen. Der Strahl zeigt zwar in beiden Fällen periodische Erweiterungen und Verengungen (die Strömungslinien sind durch Integration der Beziehung  $dr/dz = v_r^*/v_{z0}$  zu erhalten), bei Überschall wirken jedoch die magnetischen Kräfte an einer Erweiterungsstelle radial nach außen und an einer Verengungsstelle nach innen. Bei Unterschall sind die Verhältnisse dagegen gerade umgekehrt.

Die radiale Verteilung der Störgrößen ist in Achsennähe durch die Gln. (37) bis (39) gegeben, weiter außen sind weitere Glieder der Reihen in den Gln. (13) bis (15) mit heranzuziehen. Wird auch der  $\beta R$  proportionale Anteil der Koeffizienten vernachlässigt, dann ergeben sich die in Abb. 2 gezeigten radialen Abhängigkeiten der Störgrößen. Diese Näherung ist allerdings nur zulässig, wenn  $g$  von

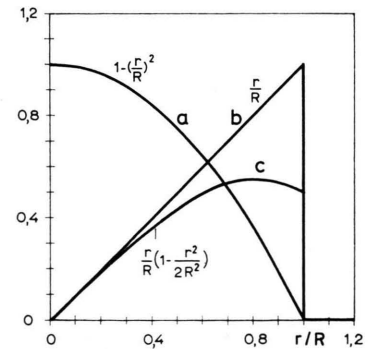


Abb. 2. Radiale Abhängigkeit der Störgrößen: a) axiale Komponente der Geschwindigkeitsstörung, Druck, Dichte, b) Stromdichte, c) radiale Komponente der Geschwindigkeitsstörung.

der Größenordnung 1 ist. Im allgemeinen Fall sind die Koeffizienten höherer Potenzen von  $r$  von den Parametern  $P_m$ ,  $Q$  sowie von  $\beta R$  abhängig.

#### 4. Konvergentes bzw. divergentes Magnetfeld

##### 4.1 Fourier-Transformation

Mittels einer FOURIER-Transformation wird aus der periodischen Lösung eine nicht-periodische Verteilung der Störgrößen berechnet. Für die radiale Komponente des äußeren Magnetfelds wird angenommen:

$$\begin{aligned} B_{ra} &= 0 & \text{für } z < 0, \\ B_{ra} &= B r(z/R) e^{-\alpha z/R} & \text{für } z > 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Mit diesem Verlauf kann ein divergentes (bei positivem  $B$ ) und ein konvergentes (negatives  $B$ ) Magnetfeld beschrieben werden. Für  $z < 0$  hat das äußere Magnetfeld nur die axiale Komponente  $B_{z0}$ . Durch Anwendung des FOURIER-Theorems läßt sich Gl. (40) auch darstellen durch

$$B_{ra} = \frac{B r}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\beta R) e^{i\beta z} d(\beta R), \quad (41)$$

wobei  $F(\beta R) = 1/(i\beta R + \alpha)^2$  die FOURIER-Transformierte des Verlaufs nach Gl. (40) ist<sup>9</sup>.

Eine der Gl. (41) gleichwertige Darstellung gilt für die anderen Störgrößen, wenn die Gln. (37) bis (39) mit  $F(\beta R)$  multipliziert und über alle  $\beta R$  integriert werden.

Trotzdem kann die Näherung  $\beta R \ll 1$  aufrecht erhalten werden, wenn die Bedingung  $\alpha \ll 1$  erfüllt ist, denn dadurch wird erreicht, daß die Integranden nur im Bereich  $\beta R \ll 1$  wesentlich zum Integral beitragen. Die Integration läßt sich mit der Residuemethode ausführen. Die Ergebnisse sind für die verschiedenen zu unterscheidenden Fälle in Tab. 1 aufgeführt und die Abkürzungen noch einmal zusammengestellt. Die Störgrößen sind folgendermaßen normiert:

$$\underline{j} = j_{\varphi}^*/(\sigma v_{z0} B r), \quad (42)$$

$$\underline{v_r} = v_r^*/(v_{z0} B r), \quad (43)$$

$$\underline{B_{rt}} = B_{rt}^*/(B r), \quad \underline{B_{ra}} = B_{ra}/(B r), \quad (44)$$

$$\underline{v_z} = \underline{j} = 2 Q_0 v_z^*/(\sigma B_{z0} R^2 B), \quad (45)$$

$$\underline{p} = -\underline{j} = 2 p^*/(\sigma B_{z0} R^2 v_{z0} B). \quad (46)$$

	$\underline{v_r}$	$\underline{j}$	$\underline{B_{rt}}$
$\underline{g} > 0$ $\underline{z} > 0$ I, II	$m^2 Q g \frac{e^{-gt} + (g - (g - \alpha) \alpha t) e^{-at}}{(a - g)^2} \quad (47)$ bei $g = \alpha$ $m^2 Q \alpha t (1 - \alpha t/2) e^{-at}$	$g \frac{e^{-gt} - (1 - (g - \alpha) t) e^{-at}}{(a - g)^2} \quad (48)$ bei $g = \alpha$ $\alpha t^2 e^{-at/2}$	$g \frac{(1 - m^2 Q g) e^{-gt} + [(1 - m^2 Q \alpha) ((g - \alpha) t - 1) + m^2 Q (g - \alpha)] e^{-at}}{(a - g)^2} \quad (49)$ bei $g = \alpha$ $\alpha [m^2 Q (1 - \alpha t) + \alpha t^2/2] e^{-at}$
III $\underline{g} < 0$ $\underline{z} > 0$	$m^2 Q g \frac{g + (a - g) \alpha t}{(a - g)^2} e^{-at} \quad (50)$	$-g \frac{1 + (a - g) t}{(a - g)^2} e^{-at} \quad (51)$	$g \frac{(a - g) (1 - m^2 Q \alpha) t + 1 - m^2 Q g}{(a - g)^2} e^{-at} \quad (52)$
$\underline{g} < 0$ $\underline{z} < 0$	$m^2 Q g \frac{g e^{-gt}}{(a - g)^2} \quad (53)$	$-g \frac{e^{-gt}}{(a - g)^2} \quad (54)$	$g \frac{(1 - m^2 Q g) e^{-gt}}{(a - g)^2} \quad (55)$

Bezeichnungen:  $R_m = \frac{1}{2} \sigma \mu v_{z0} R = \text{magn. REYNOLDS-Zahl}$ ;  $Q = B_{z0}^2 R / (4 Q_0 v_{z0})$ ;  $C = B_{z0}^2 / (\mu Q_0 v_{z0}^2)$ ;  $Q = C R_m$ ;  $M = v_{z0}/c$ ;  $m^2 = M^2 - 1$ ;  
 $\underline{g} = 1/(R_m + m^2 Q)$ ;  $\underline{t} = z/R$ ;  $\underline{B_{ra}} = B r e^{-at}$ .

Tab. 1. Ergebnisse der Fourier-Transformation.

<sup>9</sup> G. A. CAMPBELL u. R. M. FOSTER, Fourier Integrals for Practical Application, van Nostrand Co., New York 1948.



Die normierten Störgrößen stellen die von  $r$  unabhängigen Koeffizienten des ersten Gliedes der Potenzreihenentwicklung dar. In Achsennähe sind die Stromdichte und die radialen Komponenten der Geschwindigkeit und des Magnetfeldes proportional zu  $r$ , die axiale Störgeschwindigkeitskomponente und die Druckstörung dagegen unabhängig von  $r$ .

Mit der unter 3.5 beschriebenen Näherung gelten weiter außen die radialen Abhängigkeiten, die in Abb. 2 eingezeichnet sind. Im allgemeinen Fall, wenn die Koeffizienten der Entwicklung von  $\beta$  abhängen, muß dies bei der Rücktransformation berücksichtigt werden, was zu einer Nicht-Separierbarkeit der  $r$ - und  $z$ -Abhängigkeit der Lösung führt. Dieser Fall wird hier nicht näher untersucht.

#### 4.2 Diskussion der Ergebnisse

##### 4.21 Fallunterscheidung, dimensionslose Parameter

Folgende Parameter treten in der Lösung auf:

die MACH-Zahl  $M = v_{z0}/c$ ,

die magnetische REYNOLDS-Zahl  $R_m = \frac{1}{4} \sigma \mu v_{z0} R$ , ferner die in Gl. (35) eingeführte Größe  $Q$ , die sich umschreiben läßt in  $Q = R_m C$ , wobei  $C$

die COWLINGSche Zahl  $C = B_{z0}^2 / (\mu \varrho_0 v_{z0}^2)$  ist.

Zu unterscheiden ist bei der Diskussion zwischen Überschall ( $m^2 > 0$ ) und Unterschall ( $m^2 < 0$ ). Bei Unterschall ist eine weitere Unterscheidung, nämlich die zwischen  $g > 0$  und  $g < 0$ , zu treffen. Nach Gl. (36) tritt der Vorzeichenwechsel von  $g$  bei  $m^2 C = -1$  auf, oder bei

$$(u^2/c^2 - 1) v_A^2/c^2 = -1 \quad (56)$$

wobei die ALFVÉN-Geschwindigkeit

$$v_A = B_{z0} / \sqrt{\mu \varrho_0} \quad (57)$$

eingeführt wurde. Die Geschwindigkeit  $u$  ist das spezielle  $v_{z0}$ , für das Gl. (56) gilt:

$$u = v_A c / \sqrt{v_A^2 + c^2}. \quad (58)$$

Die drei möglichen Fälle lassen sich durch Bereiche in der  $v_{z0}/v_A - v_{z0}/c$ -Ebene veranschaulichen. Gl. (56) stellt darin einen Kreis um den Ursprung mit dem Radius 1 dar, Über- und Unterschall werden durch die Senkrechte auf der Abszisse im Punkt  $v_{z0}/c = 1$  getrennt (Abb. 3).

Mit einem ähnlichen Diagramm wird in der Literatur<sup>5-7</sup> das Verhalten des magnetogasdynamischen Gleichungssystems bei  $R_m \rightarrow \infty$  beschrieben. Dabei tritt noch eine weitere Unterscheidungskurve, die in Abb. 3 gestrichelt eingezeichnete Gerade  $v_{z0}/v_A = 1$

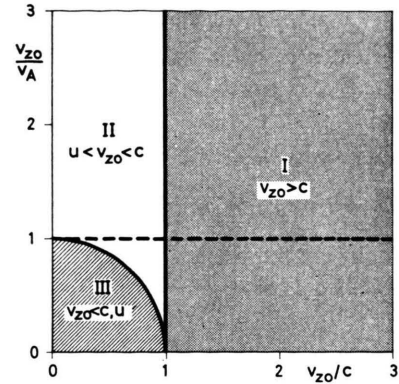


Abb. 3. Fallunterscheidung in der  $v_{z0}/v_A - v_{z0}/c$ -Ebene.

auf, die aber in dem hier behandelten Problem keine Rolle spielt.

Die  $z$ -Abhängigkeit der Störgrößen in den drei Bereichen wurde für verschiedene Parameter mit Hilfe einer elektronischen Rechenanlage<sup>10</sup> ausgewertet. Im folgenden wird je ein typischer Fall für jeden der drei Bereiche anhand von Abbildungen genauer diskutiert; anschließend werden die Einflüsse der einzelnen Parameter auf die Lösung sowie einige Sonderfälle behandelt. Die Diskussion erfolgt für ein negatives  $B$ , d. h. für ein konvergentes Feld.

##### 4.22 Überschallstrahl (Bereich I)

In Abb. 4 sind oben die normierten Störgrößen für  $\alpha = 0,5$ ,  $R_m = 0,5$  und  $m^2 C = 10$  dargestellt.  $B_{ra}$  ist gestrichelt mit eingetragen. Darunter ist schematisch ins Feldlinienbild des äußeren Magnetfeldes der Strahlrand eingetragen. Die Linearisierungsbedingungen  $v_r^* \ll v_{z0}$  und  $B_{ra} \ll B_{z0}$  sind in der Zeichnung zum Zweck besserer Übersichtlichkeit nicht eingehalten.

Abb. 4 ist zu entnehmen, daß mit Beginn des radialen Störmagnetfeldes ( $z=0$ ) eine Stromdichte induziert wird, die zusammen mit dem axialen Magnetfeld eine zur Achse gerichtete Kraft erzeugt. Diese bewirkt bei Überschall zunächst eine Einschnürung des Strahls, die jedoch über die „Gleichgewichtslage“ hinaussschwingt und deshalb wieder zu einer Strahlerweiterung Anlaß gibt.

An der Einschnürungsstelle herrscht im Strahl Überdruck, der das Plasma zunächst verzögert und dann stromabwärts wieder beschleunigt.

Das induzierte Feld bewirkt eine solche Veränderung des äußeren Feldes, daß eine Annäherung des Feldverlaufs an den der Stromlinien erfolgt.

<sup>10</sup> Rechenzentrum der Bayerischen Akademie der Wissenschaften und der Technischen Hochschule München.

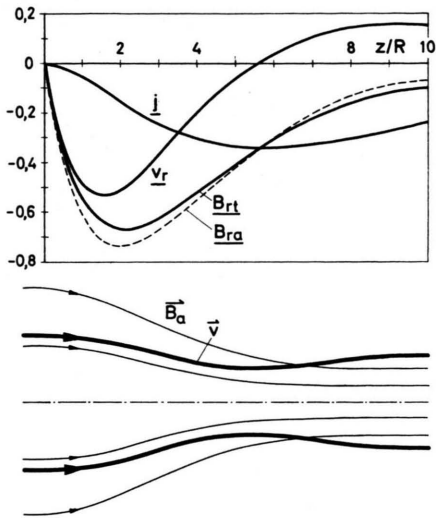


Abb. 4. Plasmastrahl im konvergenten Feld Bereich I ( $R_m = 0,5$ ,  $m^2 C = 10$ ). Oben: axieller Verlauf der Störgrößen, unten: Strahlrand im Feldlinienbild des äußeren Magnetfelds.

#### 4.23 Unterschallstrahl bei „kleinem“ Magnetfeld (Bereich II)

Für Unterschall und  $v_{z0} > u$ , d. h. nach Gl. (58) für ein relativ niedriges axiales Magnetfeld  $B_{z0}$  zeigt Abb. 5 oben die normierten Störgrößen bei  $\alpha = 0,5$ ,  $m^2 C = -0,5$  und  $R_m = 3$  wieder für ein konvergentes Feld. Darunter ist schematisch der Strahlrand in das Feldlinienbild des äußeren Feldes eingetragen.

Wie im Fall I wird eine solche Stromdichte mit Beginn des Störfelds ( $z = 0$ ) induziert, daß eine Kraftwirkung auf das Plasma zur Achse hin entsteht. Bei Unterschall bewirkt dies jedoch eine Strahlaufweitung (Aufstau), verbunden mit einer Druck-erhöhung in der Achse.

Durch das induzierte Magnetfeld wird das Maximum des Gesamtmagnetfelds, verglichen mit dem äußeren Feld, stromabwärts verschoben und verkleinert. Für kleine  $z$  hat  $B_{rt}$  positive Werte, d. h. die Feldlinien des totalen Feldes divergieren zunächst ähnlich wie die Strömungslinien.

#### 4.24 Unterschallstrahl bei „großem“ Magnetfeld (Bereich III)

Wird beim Unterschallstrahl das axiale Feld gesteigert, bis  $u > v_{z0}$  wird, dann ergibt sich ein völlig anderes Verhalten des Strahls. In Abb. 6 sind Störgrößen und Strahlrand wie oben eingezeichnet. Es ist  $\alpha = 0,5$ ,  $R_m = 0,5$  und  $m^2 C = -10$ .

Die Störgrößen sind jetzt auch für  $z < 0$ , wo kein radiales äußeres Feld vorhanden ist, von Null verschieden. Qualitativ ist der Verlauf ähnlich wie im

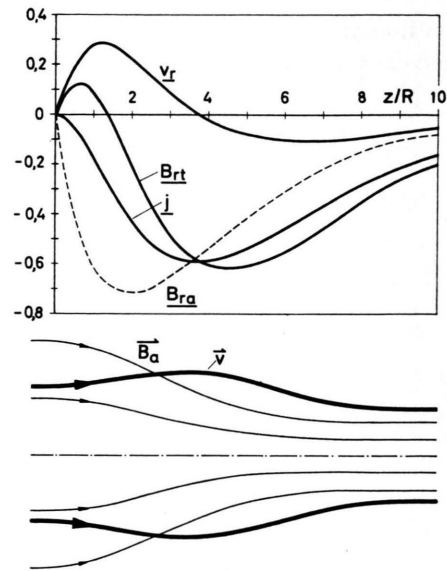


Abb. 5. Plasmastrahl im konvergenten Feld Bereich II ( $R_m = 3$ ,  $m^2 C = -0,5$ ). Oben: axieller Verlauf der Störgrößen, unten: Strahlrand im Feldlinienbild des äußeren Magnetfelds.

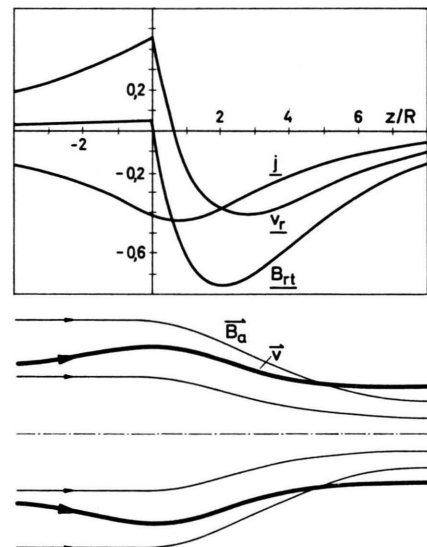


Abb. 6. Plasmastrahl im konvergenten Feld Bereich III ( $R_m = 0,5$ ,  $m^2 C = 10$ ). Oben: axieller Verlauf der Störgrößen, unten: Strahlrand im Feldlinienbild des äußeren Magnetfelds.

Bereich II, die induzierte Stromdichte komprimiert das Plasma, was mit einer Strahlverbreiterung verbunden ist, die sich ebenfalls im stromaufwärts von der Störstelle gelegenen Gebiet auswirkt.

Die Beeinflussung des Gebietes oberhalb der Störstelle ( $z < 0$ ) ist ein typischer magnetogasdynamischer Effekt, auf den unten noch näher eingegangen wird.

#### 4.25 Einfluß der magnetischen REYNOLDS-Zahl und der COWLINGSchen-Zahl auf die Lösung

Zunächst werden die Grenzfälle unendlich großer und verschwindender Werte dieser Parameter diskutiert.

$R_m = 0$  ist trivial, wegen  $\sigma = 0$  führt es zu  $v_r^* = 0$  und  $j_\varphi^* = 0$ .

Für  $R_m \rightarrow \infty$  folgt aus den Gln. (47) und (49):

$$v_r^* = v_{z0} \frac{B r}{B_{z0}} \frac{m^2 C}{1+m^2 C} \frac{z}{R} e^{-\alpha z/R} \quad \text{für } z > 0, \quad (59)$$

$$E_{rt}^* = B r \frac{m^2 C}{1+m^2 C} \frac{z}{R} e^{-\alpha z/R} \quad \text{für } z > 0. \quad (60)$$

Daraus ergibt sich  $v_r^*/v_{z0} = B_{rt}^*/B_{z0}$ , d. h. der Geschwindigkeitsvektor ist parallel zum Vektor des Gesamtmagnetfelds. Dies gilt allgemein bei  $R_m \rightarrow \infty$ <sup>11</sup>.

Für die Stromdichte folgt aus Gl. (48) im Bereich I und II:

$$j_\varphi^* = \frac{4 B r}{\mu \alpha^2 R} \frac{1}{1+m^2 C} [1 - (1 + \alpha z/R)] e^{-\alpha z/R} \quad (61)$$

für  $z > 0$

und im Bereich III:

$$j_\varphi^* = - \frac{4 B r}{\mu \alpha^2 R} \frac{1}{1+m^2 C} \quad \text{für } z < 0, \quad (62)$$

$$j_\varphi^* = - \frac{4 B r}{\mu \alpha^2 R} \frac{1}{1+m^2 C} (1 + \alpha z/R) e^{-\alpha z/R} \quad \text{für } z > 0. \quad (63)$$

Abb. 7 zeigt diese Stromdichteverläufe normiert auf den Maximalwert für ein konvergentes Feld.

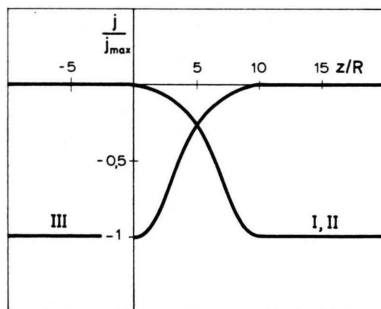


Abb. 7. Axialer Verlauf von normierter Stromdichte und Achsendruck bei unendlicher magnetischer REYNOLDS-Zahl.

Im Bereich I und II klingt die induzierte Stromdichte *stromabwärts* der Störstelle nicht ab. Dies hat zweierlei zur Folge:

Erstens wird dadurch ein Magnetfeld erzeugt, das an der Störstelle die radiale Komponente des äußeren

Feldes so weit kompensiert, bis  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{B}_t$  erfüllt ist (eingefrorenes Feld), und das im übrigen Bereich nur eine axiale Komponente besitzt (halb unendlich lange „Spule“);

zweitens wird der Überdruck, der in der Achse an der Störstelle entsteht, durch die Kraftwirkung der Stromdichte bis ins Unendliche aufrecht erhalten. Im Bereich III erstreckt sich die Störzone *stromaufwärts* bis ins Unendliche, ebenfalls verbunden mit einer Druckerhöhung in der Achse (beim konvergenten Feld).

Dieses Ergebnis ist interessant im Zusammenhang mit allgemeinen Betrachtungen über das magnetogasdynamische Gleichgewichtssystem durch HASIMOTO, RESLER, SEARS, CLAUSER u. a.<sup>4, 5, 12, 13</sup>, die zeigen, daß in der Magnetogasdynamik eine Störung sich längs der Magnetfeldlinien von der Störstelle weg ausbreitet und daß allgemein im Bereich III die Störzone stromaufwärts liegt. Der Mechanismus der Störungsausbreitung ist die Wechselwirkung von Strömungsfeld und Magnetfeld wie bei ALFVÉN-Wellen. Die endliche Leitfähigkeit stellt die Dämpfung dieses Ausbreitungsmechanismus dar. Die vorliegende Untersuchung liefert ein konkretes Beispiel für die Beschaffenheit einer solchen Störzone bei beliebigen Werten der magnetischen REYNOLDS-Zahl.

Für  $C = 0$  wird die Plasmaströmung vom Magnetfeld nicht beeinflusst, wenn auch ein Strom nach Gl. (48) induziert wird.

Für  $C \rightarrow \infty$  ergibt sich aus den Gln. (47) und (49)

$$v_r^*/v_{z0} = B_{rt}/B_{z0},$$

d. h. in diesem Falle folgt die Plasmaströmung den Feldlinien des *äußeren* Magnetfelds, die Stromdichte verschwindet mit  $1/C$ .

Für mittlere Werte von  $R_m$  und  $C$  zeigt sich, daß beide Größen die Lösung in ähnlicher Weise beeinflussen. Es gelingt nicht, einen von beiden Parametern oder eine Kombination beider eindeutig mit dem Grad der Wechselwirkung zwischen Magnetfeld und Strömungsfeld in Beziehung zu setzen. Sowohl eine Erhöhung von  $R_m$  als auch von  $C$  läßt die Störung weniger schnell abklingen und bewirkt bei Überschall eine Dämpfung des Überschwingens, bei Unterschall eine geringere Aufweitung, bis schließlich im Grenzfall die Verhältnisse gemäß Gln. (59) bis (63) erreicht sind.

Herrn Prof. MAECKER danke ich für sein Interesse an der Arbeit.

<sup>11</sup> L. SPITZER, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience Publishers, New York 1956.

<sup>12</sup> H. HASIMOTO, Rev. Mod. Phys. **32**, 860 [1960].

<sup>13</sup> F. H. CLAUSER, Phys. Fluids **6**, 231 [1963].